

PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

**RECURSO 21: AS FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS EM SÉRIES
HARMÓNICAS**

**SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino**

"Violino Castanho"

(Fonte: <https://www.pexels.com/photo/brown-violin-697672/>)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Funções Trigonométricas nas Séries Harmónicas

Faixa Etária: 16 – 18 anos

Duração: 3 horas

Conceitos Matemáticos: Funções trigonométricas

Conceitos Artísticos: Séries harmónicas na música, notas musicais, frequência das notas musicais e ondas sonoras.

Objetivos Gerais: Compreender a noção de funções trigonométricas, calcular o período do gráfico de uma função trigonométrica e resolver equações trigonométricas.

Instruções e Metodologias: Será útil usar uma calculadora gráfica (poderá ser a calculadora online Desmos) para mostrar os gráficos aos alunos e apresentar as soluções das equações trigonométricas. Além disso, para que os alunos tenham uma imagem mais clara dos modos de vibração, exiba o vídeo “Modos de vibração” (cf. “Informações e Recursos Adicionais”) após a respetiva explicação.

Recursos: Uma caneta; computador com acesso à internet; acesso ao website: <https://www.desmos.com/>.

Sugestões para o professor: Iniciar a partir da demonstração de gráficos de funções trigonométricas e explicar as suas propriedades. Resolver uma equação trigonométrica para cada uma das três funções lecionadas, permitindo que os alunos as possam resolver de forma autónoma.

Resultados de aprendizagem e competências:

No final deste módulo, o aluno será capaz de:

- Obter o gráfico de uma função trigonométrica;
- Calcular o período de uma função trigonométrica;
- Resolver equações do tipo $\sin x = a$, $\cos x = a$ e $\tan x = a$.

Balanco e avaliação:

Indique 3 aspetos de que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido	1. 2.
Enumere 1 aspeto que possa melhorar	1.

Introdução

A Matemática e a Música estão relacionadas desde sempre. Contudo, a primeira prova desta ligação verificou-se somente no séc. VI a.C. Pitágoras comparou o som produzido por martelos de diferentes tamanhos, usados pelos ferreiros, ao som de um monocórdio, do qual há quem acredite ter sido Pitágoras o seu inventor.

Este paralelismo permitiu que Pitágoras descobrisse e aprimorasse as razões matemáticas por detrás dos sons, através do estudo dos sons produzidos pelo monocórdio, do qual dividiu primeiramente a corda em duas partes iguais, de seguida em três, e assim sucessivamente. Pitágoras combinou os sons de forma matemática, de acordo com as subdivisões que estava a levar a cabo, criando a escala pitagórica, na qual cada nota mantém um relacionamento bem definido com as restantes.

Muitos povos e culturas criaram as suas próprias escalas. Um desses exemplos parte do povo chinês, que criou a escala pentatónica. Contudo, na cultura ocidental, adotou-se uma escala com 12 notas, denominada escala temperada ou cromática.

Séries Harmónicas

É do conhecimento comum a escala das sete notas musicais “naturais”: A, B, C, D, E, F e G. Não obstante, estas são representadas na maior parte dos países pela convenção de nomenclatura de solfejo: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá-Si, de acordo com a seguinte correspondência: C-Dó, D-Ré, E-Mi, F-Fá, G-Sol, A-Lá e B-Si. A definição destas notas foi amplamente influenciada pela Matemática.

No século VI a.c, Pitágoras percebeu que se colocasse uma corda em vibração, esta não só vibraria na sua extensão total, como também formaria uma série de nós, os quais se dividem em secções mais pequenas, os ventres, que vibram a uma frequência mais alta que a frequência fundamental.

A fim de estudar a relação entre a duração da vibração da corda e o tom por ela produzido, Pitágoras usou um monocórdio.

Na figura 2 é possível observar os nós e os ventres das quatro primeiras frequências de uma série. Para uma fácil compreensão, são dispostas separadamente, mas, numa corda real, todas se sobrepõem, o que origina um desenho complexo, similar à forma de onda de um instrumento.

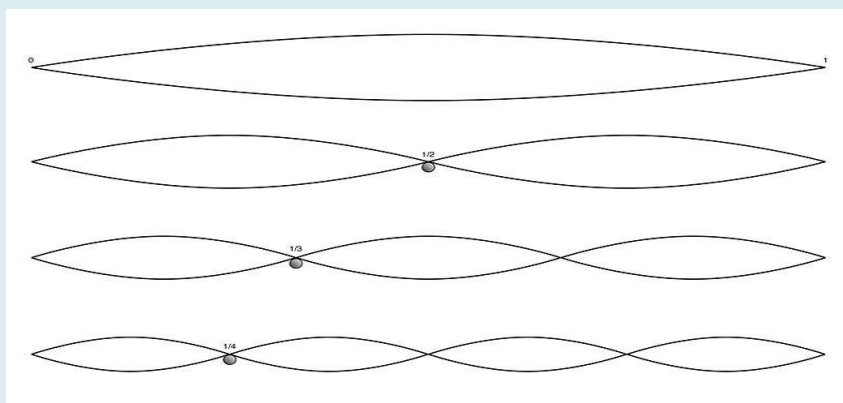


Fig. 2 – Nós e ventres das primeiras 4 frequências

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

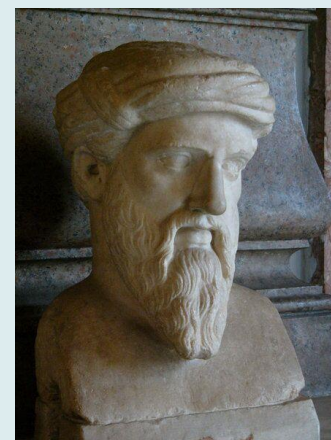


Fig. 1 – Busto de Pitágoras

(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Imagine uma corda esticada, presa em cada ponta. Ao tocarmos no meio da corda, esta vibra (figura 3) e produz uma nota, denominada de nota fundamental.

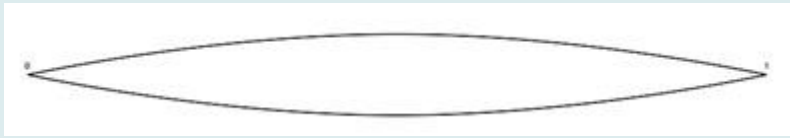


Fig. 3 – Modos de vibração de uma nota fundamental 1(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pitágoras decidiu dividir a corda em duas partes (figura 4) e tocar no meio de uma das partes. O som produzido foi o mesmo, embora com uma frequência maior (comumente exemplificado através da expressão “a mesma nota, uma oitava acima”). Desde então, ficou provado que sempre que o número de divisões (ou número harmónico) é múltiplo de um número anterior, o som será repetido, porém com uma nota mais alta/aguda.

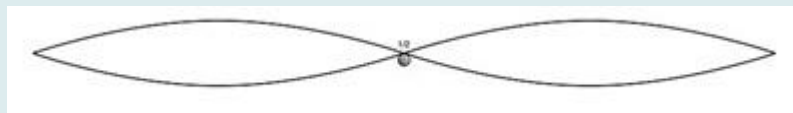


Fig. 4 – Modos de vibração de uma nota fundamental 2(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

5

Pitágoras decidiu então experimentar dividir a corda em 3 partes (figura 5) para descobrir como soaria e reparou que um novo som, diferente do anterior, fora emitido. Desta vez, não se seguiu a premissa “mesma nota, uma oitava acima”, mas sim uma nota completamente diferente, tendo direito a outra designação – a quinta.



Fig. 5 – Modos de vibração de uma nota fundamental 3(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Este som, embora diferente, combinou bem com o som anterior. Criou uma harmonia agradável ao ouvido, devido ao facto de as divisões feitas terem as relações matemáticas de $1/2$ e $2/3$. Com a divisão da corda em quatro partes, ele obteve uma nota conhecida agora como “quarta”. Estas três notas estão em consonância com a nota fundamental.

Desta forma, continuou a subdividir a corda, obtendo a harmonia da nota fundamental, e, ao combinar os sons de forma matemática, criou escalas, as quais resultam em notas que se relacionam naturalmente umas com as outras. Ao longo do tempo, foram sendo dados às notas os nomes pelos quais as conhecemos nos dias de hoje, que já foram mencionados.

Neste processo, cada nota que provém de um objeto sofre a influência de uma frequência fundamental que exulta outras harmonias, a qual resulta numa série de frequências – as séries harmónicas, infinitas e compostas por ondas sinusoidais com todas as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Não existe uma só série harmónica, mas sim uma série diferente para cada frequência fundamental.

Olhemos um exemplo de uma série harmónica que começa com A_2 / Lá₁ (110 Hz). As primeiras 16 harmonias para essa série podem ser observadas na tabela seguinte:

Harmónico #	Nota (Inglês)	Nota (Neolatino)	Frequência (Hz)
1 (F)	A_2	Lá ₁	110
2	A_3	Lá ₂	220
3	E_4	Mi ₃	330
4	A_5	Lá ₃	440
5	$C\#_5$	Do $\#_4$	550
6	E_4	Mi ₄	660
7	G_4	Sol ₄	770
8	A_5	Lá ₄	880
9	B_5	Si ₄	990
10	$C\#_6$	Do $\#_5$	1100
11	$D\#_6$	Ré $\#_5$	1210
12	E_6	Mi ₅	1320
13	$F\#_6$	Fá $\#_5$	1430
14	G_6	Sol ₅	1540
15	$G\#_5$	Sol $\#_5$	1650
16	A_6	Lá ₅	1760

Tabela 1 – Primeiros 16 harmónicos

Forma de onda

Quando um instrumento musical produz sons, entra em vibração, e é emitida uma série de ondas sinusoidais. Além da frequência fundamental que define a nota, são também emitidas várias frequências harmônicas (onda com uma frequência que se trata de um múltiplo inteiro positivo da frequência da onda original). Desta forma, a existência de várias frequências no mesmo intervalo de tempo, produzidas pela mesma fonte sonora, leva à formação de ondas complexas/irregulares, resultantes da soma de harmonias sinusoidais simples, como se vê no exemplo fornecido pela Fig. 6.

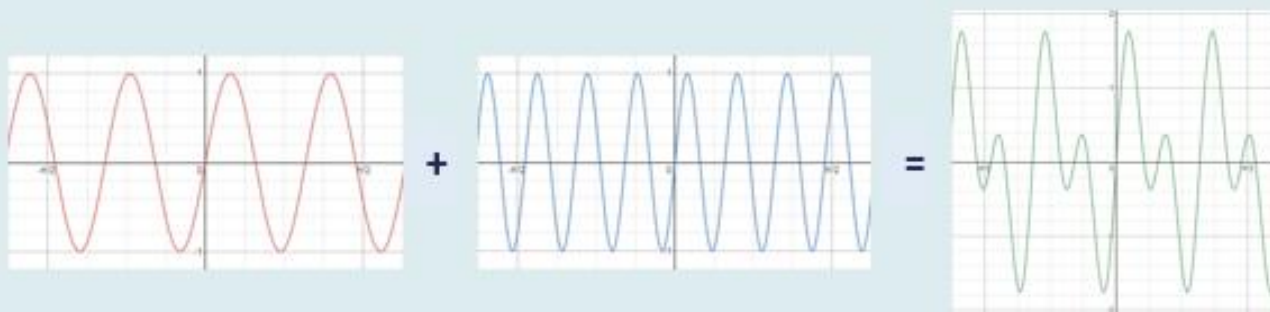


Fig. 6 – Formação de uma onda sonora irregular
(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

Glossário

Agudo: Som de alta frequência da audição humana, normalmente acima dos 5 KHz

Escala Musical: Sequência ordenada de tons pela frequência vibratória de sons (normalmente do som de frequência mais baixa para o de frequência mais alta)

Escala Pentatônica: conjunto de todas as escalas formadas por cinco notas ou tons

Escala Temperada: divisão da oitava em doze semitons iguais

Frequência: grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento, num determinado intervalo de tempo

Frequência Fundamental: a mais baixa e mais forte frequência componente da série harmônica de um som

Harmonia: combinação simultânea de sons

Harmônico: som de uma série que constitui uma nota

Monocórdio: antigo instrumento musical, composto por uma caixa de ressonância, sobre a qual era estendida uma única corda, presa por dois cavaletes móveis

Nota Fundamental: nota principal de um acorde

Oitava: intervalo entre notas com a metade ou o dobro da sua frequência

Quarta: intervalo entre notas, que esteja a três graus de distância da primeira, dentro de uma escala

Quinta: intervalo entre notas, que esteja a quatro graus de distância da primeira, dentro de uma escala

Série Harmônica: conjunto de ondas composto da frequência fundamental e de todos os múltiplos inteiros desta frequência

A Matemática por trás das Séries Harmônicas: funções trigonométricas

Quando um instrumento musical é capaz de produzir sons, o mesmo vibra e uma série de ondas sinusoidais é emitida. Quando isoladas, estas ondas obedecem à seguinte função matemática: $f(x) = \sin(f_i \cdot 2\pi x)$, na qual f_i é a frequência da harmonia de ordem i .

Observemos um exemplo: se a frequência de uma harmonia é 1, então as ondas emitidas irão assemelhar-se ao seguinte:

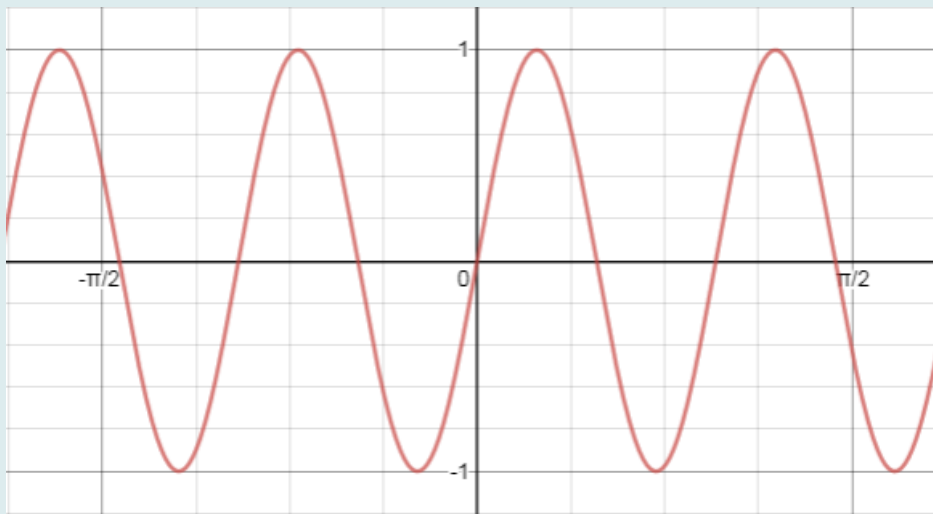


Fig. 7 – Onda sinusoidal da função $f(x) = \sin(f_i \cdot 2\pi x)$ na qual $f_i = 1$.
(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

Dediquemos algum tempo à trigonometria e às funções trigonométricas para melhor compreender as ondas sinusoidais.

1. Funções Trigonômétricas

Funções trigonométricas como funções reais de variável real

Se a cada número real x corresponder a um e a um só número real y tal que $y = \sin x$ e $y = \cos x$, assim, $y = \sin x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$ ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) passam a ser consideradas funções reais de variável real.

Domínio, contradomínio, extremos e zeros das funções trigonométricas

Numa função $f(x)$, o valor de x corresponde a qualquer número real e é geralmente designado como **domínio**. Quanto ao conjunto Y , no qual todo o conjunto de chegada é forçado a cair é chamado **contradomínio**. Por outras palavras, qualquer valor que entra numa função é o domínio, enquanto que o que sai é o contradomínio.

Ao modelar uma função $f(x)$, irá reparar que esta possui um valor mais alto de todos e outro mais baixo de todos. Estes são os **extremos** e correspondem ao ponto **mínimo e máximo** numa função. Para além disso, uma função pode ter zeros. Estes são as intersecções no eixo dos x , ou seja, o zero da função é um valor de entrada que produz um valor de saída de zero.

Observemos os gráficos das funções $y = \sin x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

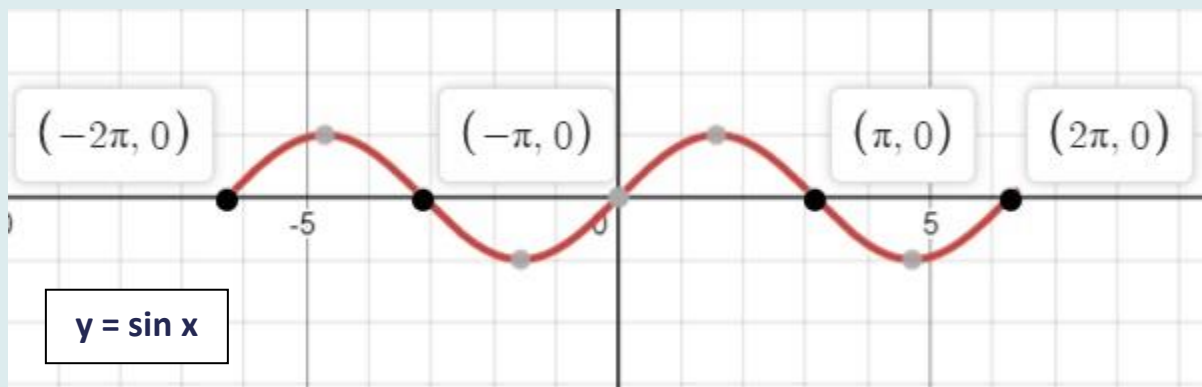


Fig. 8 – Função gráfica de $y = \sin x$
(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

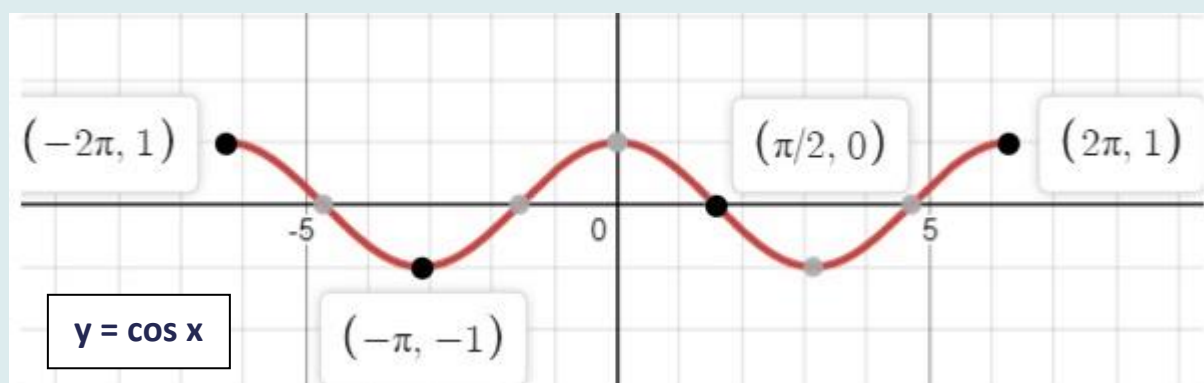


Fig. 9 – Função gráfica de $y = \cos x$
(Fonte: Autor, em Desmos.com)

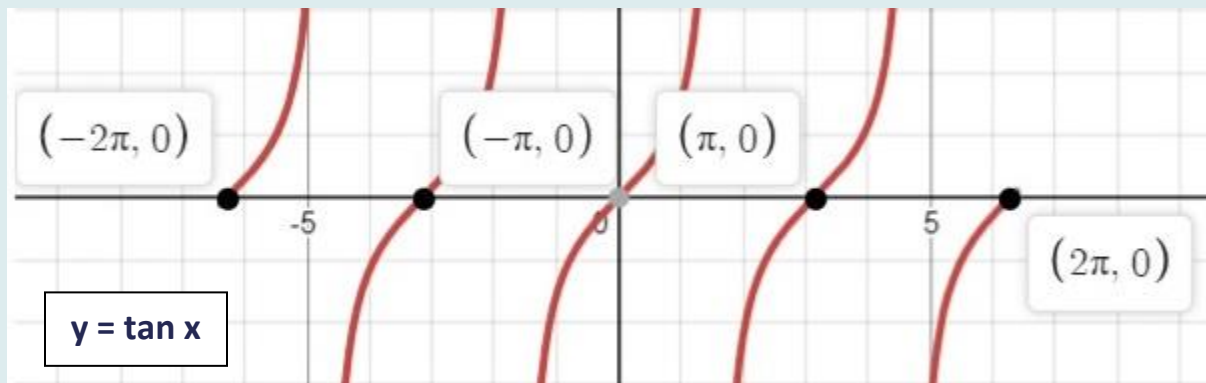


Fig. 10 – Função gráfica de $y = \tan x$
(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

Por observação dos gráficos, pode-se concluir que:

Função	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
Domínio	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
Contradomínio	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	\mathbb{R}
Ponto Máximo	1 to: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	1 to: $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	-----
Ponto Mínimo	-1 to: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	-1 to: $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	-----
Zeros	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Monotonia das funções trigonométricas

Observando os gráficos anteriores no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, podemos concluir que:

- $\sin(x)$ é crescente em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$;
- $\cos(x)$ é crescente em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, e decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

Relativamente à função $y = \tan x$ verifica-se que a função é crescente em todos os intervalos em que está definida.

3. Simetria e paridade das funções trigonométricas

Função par

- Uma função f é par apenas se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- O gráfico de uma função par é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.

The function $y = \cos x$ is an **even function**, that is, $\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Função ímpar

- Uma função é ímpar apenas se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.
- O gráfico de uma função ímpar é simétrico relativamente à origem das coordenadas.

A função $y = \sin x$ é uma **função ímpar**, ou seja, $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A função $y = \tan x$ é uma **função ímpar**, ou seja, $\tan(-x) = -\tan x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Período das funções trigonométricas

A função f é periódica de **período** p se p é a menor constante positiva, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo o x do domínio de f .

- O período da função $y = \sin x$ is 2π : $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} (k \in \mathbb{Z})$;
- O período da função $y = \cos x$ is 2π : $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R} (k \in \mathbb{Z})$;
- O período da função $y = \tan x$ is π : $\tan(x + k\pi) = \tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$.

De um modo geral, tem-se para $k \neq 0$:

Função	$y = A + B\sin(kx + C)$	$y = A + B\cos(kx + C)$	$y = A + B\tan(kx + C)$
Período	$\frac{2\pi}{ k }$	$\frac{2\pi}{ k }$	$\frac{\pi}{ k }$

5. Resolução de equações do tipo $\sin x = a$

13

De um modo geral, para resolver, em \mathbb{R} , uma equação do tipo $\sin x = a$ devemos atentar às seguintes informações:

- A equação do tipo $\sin x = a$ só terá solução caso $a \in [-1, 1]$.
 - No intervalo $[0, 2\pi]$ existem dois valores que têm o mesmo seno: α and $\pi - \alpha$.
- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: Resolução de uma equação do tipo $\sin x = a$

Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

→ 1.º Passo:

Encontrar a solução para a equação $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sabemos que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que $\sin(-x) = -\sin x$. Logo, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Uma solução da equação será $-\frac{\pi}{4}$.

→ 2.º Passo:

Calcular $\pi - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

→ 3.º Passo:

Escreva a solução geral da equação: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Com recurso à calculadora gráfica online Desmos, podemos confirmar ambos os valores obtidos:

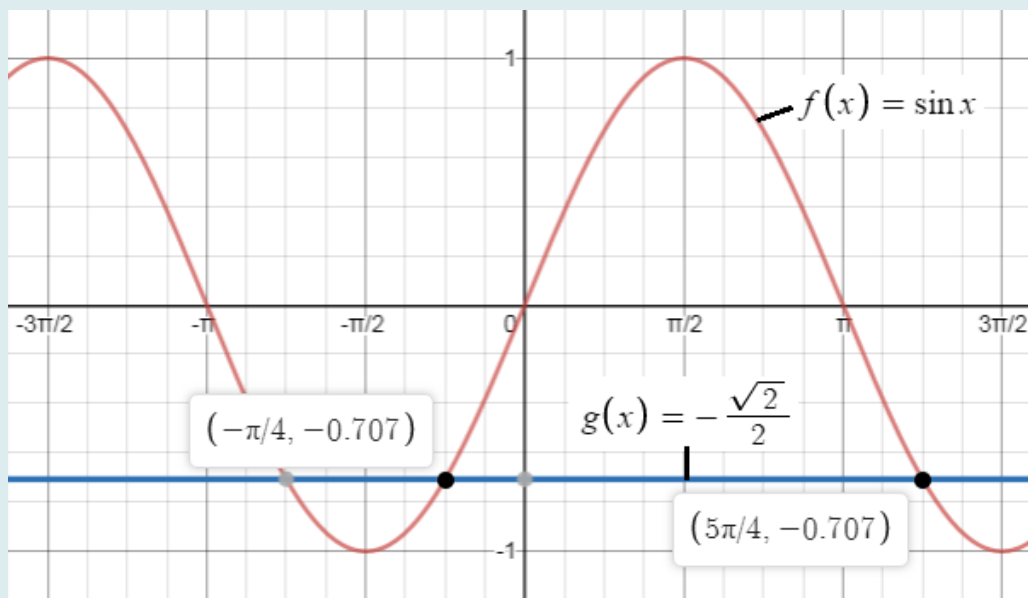


Fig. 11 – Representação gráfica da equação $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ in \mathbb{R} .

(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

6. Resolução de equações do tipo $\cos x = a$

Após dominar a resolução de uma equação do tipo $\sin x = a$, torna-se mais simples a resolução de uma equação do tipo $\cos x = a$.

A diferença está apenas em observar que: α e $-\alpha$ têm o mesmo cosseno, ou seja, que $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = a$.

Assim, para resolver, em \mathbb{R} , uma equação do tipo $\cos x = a$ devemos ter em atenção as seguintes informações:

- A equação do tipo $\cos x = a$ só tem solução se $a \in [-1,1]$.
- No intervalo $[0,2\pi]$ existem dois valores que têm o mesmo seno: α e $-\alpha$.
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo de resolução de uma equação do tipo $\cos x = a$.

Resolva, em \mathbb{R} , a equação $1 - 2\cos x = 0$.

Resolução: $1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

→ 1.º passo:

Determine α , em radianos, de modo a que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Sabemos que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, logo, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

→ 2.º passo:

Se $\alpha = \frac{\pi}{3}$ é uma solução da equação, também o é $-\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

→ 3.º passo:

Escreva a solução geral da equação: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Com recurso à calculadora online Desmos, podemos confirmar ambos os valores obtidos:

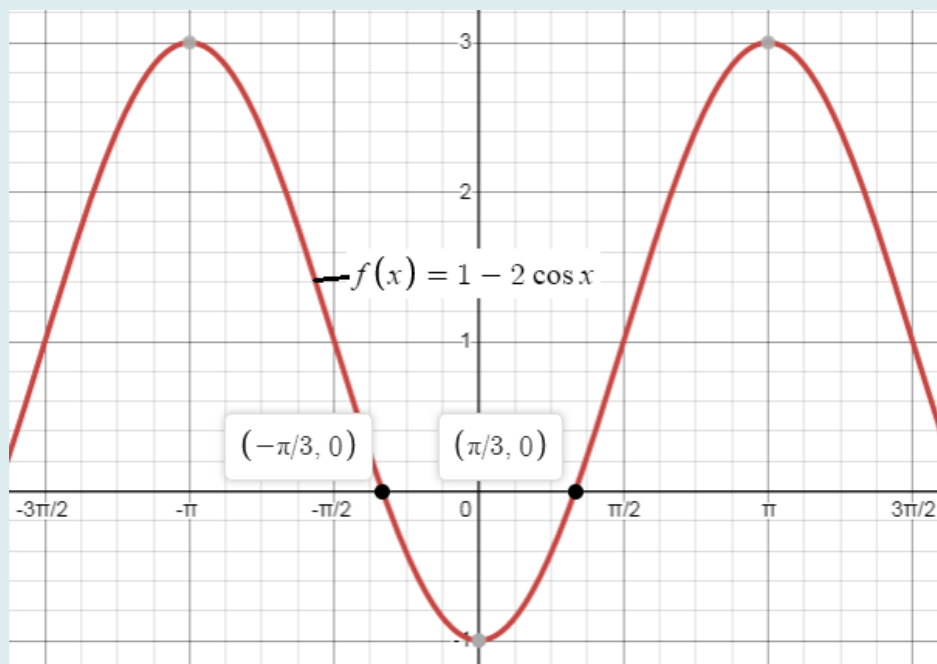


Fig. 12 – Representação gráfica da equação $1 - 2 \cos x = 0$
(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

7. Resolução de equações do tipo $\tan x = a$

16

No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\tan x = a$ tem apenas uma solução: seja ela α .

Como o período da função $y = \tan x$ é π , concluímos que se α é a solução da equação $\tan x = a$, então $\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é também uma solução.

Desta forma, para a resolução em \mathbb{R} de uma equação do tipo $\tan x = a$ devemos ter em conta as seguintes informações:

- A equação $\tan x = a$ tem solução para qualquer valor real de a .
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo de resolução de uma equação do tipo $\tan x = a$

Resolva a equação $\tan x = \sqrt{3}, 0 \leq x \leq 2\pi$ (rad).

É sabido que $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Logo, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3};$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3};$$

~~$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \text{ (maior do que } 2\pi\text{);}$$~~

~~$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} - 2\pi \text{ (menor do que } 0\text{).}$$~~

Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

Com recurso à calculadora gráfica online Desmos, podemos confirmar os dois valores obtidos:

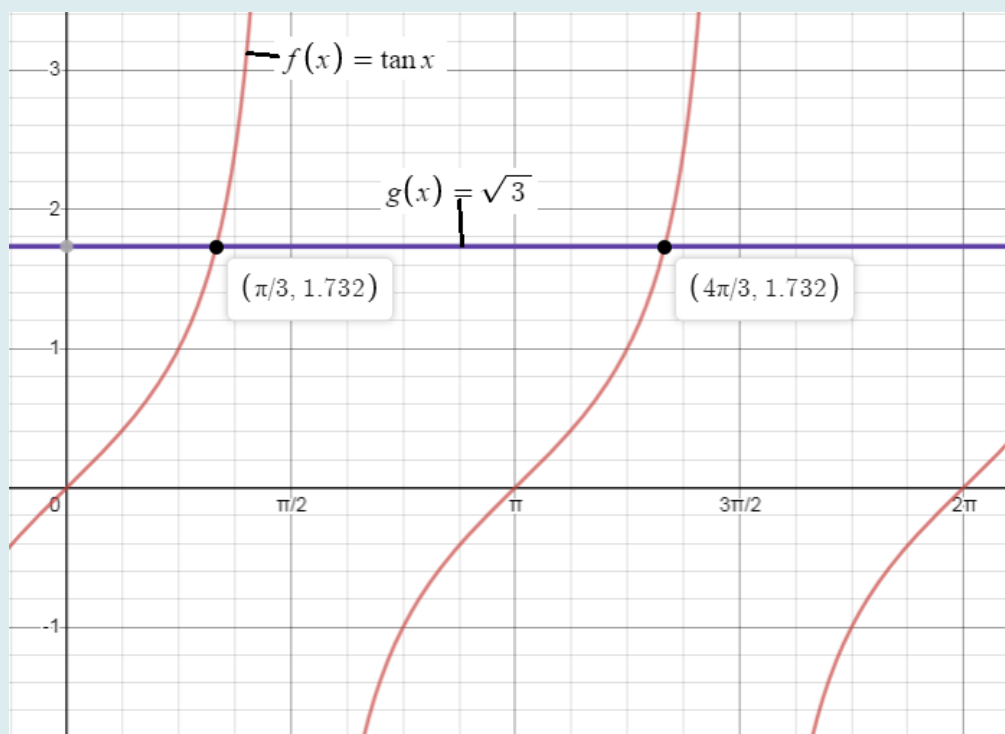


Fig. 13 – Representação gráfica da equação $\tan x = \sqrt{3}$, $0 \leq x \leq 2\pi$ (rad).

(Fonte: Autor, a partir do Desmos)

TAREFAS

TAREFA 1

Determine o período de cada uma das seguintes funções trigonométricas

- 1.1. $y = \sin(2x)$; 1.2. $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$;
1.3. $y = -2\cos(-5x)$; 1.4. $y = -20\cos(\pi x)$;
1.5. $y = -3\tan(2x)$; 1.6. $y = -3\tan\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$.

TAREFA 2

Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações trigonométricas:

- 2.1. $-2\sin(x) = \sqrt{2}$;
2.2. $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$;
2.3. $-2\sin(x) = -4$;
2.4. $2\sin(2x) - 1 = 0$.

TAREFA 3

Resolva cada uma das seguintes equações nos conjuntos indicados.

Nota: Apresente as soluções em radianos.

- 3.1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, em \mathbb{R} ;
3.2. $2\cos(x) + 1 = 0$, em \mathbb{R} ;
3.3. $\cos(x) = -1$, em $[0, 3\pi]$.

TAREFA 4

Resolva cada uma das seguintes equações nos conjuntos indicados.

Nota: Apresente as soluções em radianos.

- 4.1. $3\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{3}$, em \mathbb{R} ;
4.2. $\tan(2x) = 1$, em $[0, 2\pi]$.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

A Matemática da Música (inglês)

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKKug>

Modos de vibração (inglês)

<https://www.youtube.com/watch?v=cnH2lW48U>

As Séries Harmónicas (inglês)

<https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/>

Compreender intervalos musicais, escalas, afinação e timbre (inglês)

<http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf>

Funções trigonométricas

<https://matematicabasica.net/funcoes-trigonometricas/>

Explorar gráficos de funções trigonométricas com a aplicação Desmos

<https://www.desmos.com/>