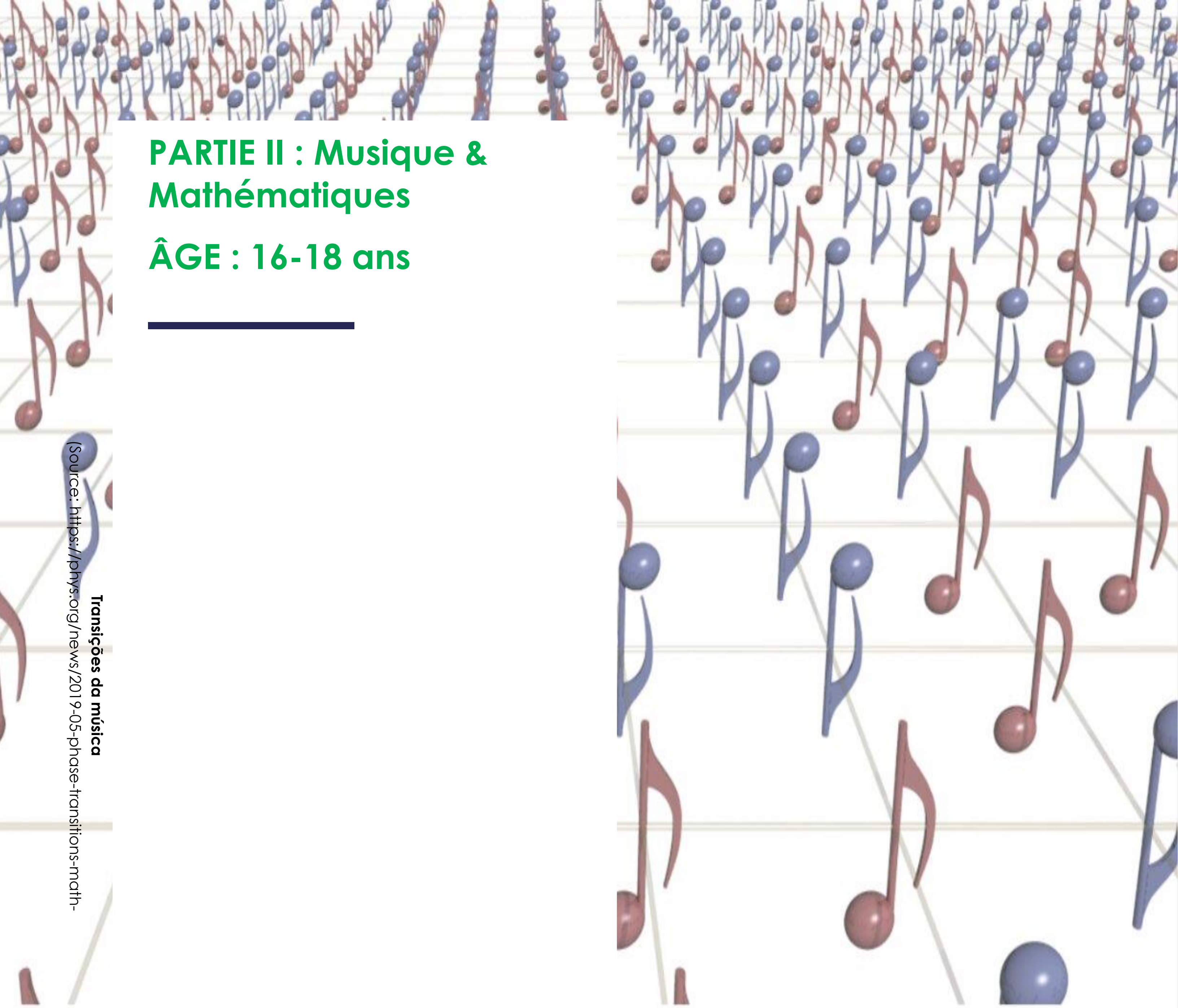

Transições da música
(Source: https://phys.org/news/2019-05-phase-transitions-math-

PARTIE II : Musique & Mathématiques

ÂGE : 16-18 ans

OUTIL 27 : LOGARITHMES DANS LA GAMME TEMPÉRÉE

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guide de l'éducateur

Titre : Logarithmes dans la gamme tempérée

Âge : 16-18 ans

Durée : 3 heures

Concepts mathématiques : Logarithmes, leurs propriétés, leurs règles de fonctionnement

Concepts artistiques : 12 tons à tempérament égal, notes de musique et fréquences des notes de musique.

Objectifs généraux : Comprendre le concept de logarithme, les propriétés d'une fonction logarithmique et effectuer des opérations impliquant des logarithmes

Instructions et Méthodologies : Il sera utile d'utiliser une calculatrice scientifique (ce peut être la calculatrice graphique en ligne Desmos) afin que l'élève apprenne à calculer les exposants dans une calculatrice et à vérifier les solutions des tâches.

Ressources : Ordinateur avec une connexion internet ; Accès au site web : https://www.desmos.com/

Conseils pour l'éducateur : Commencez par donner des exemples de calcul de logarithmes, de plus en plus difficiles, tout en expliquant leurs propriétés et leurs variations en fonction de leur base.

Résultats et Compétences ciblés : A l'issue de cet outil, l'élève sera capable de :

- Obtenir le graphe d'une fonction logarithmique ;
- Calculer la valeur des logarithmes avec différentes bases.

Compte-rendu et évaluation :

Écrivez 3 aspects que vous avez appréciés dans cette activité :	1. 2. 3.
Écrivez 2 éléments que vous avez appris :	1. 2.
Écrivez 1 aspect à améliorer :	1.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Introduction

Les mathématiques et la musique ont toujours été liées. Toutefois, ce n'est qu'au sixième siècle avant J.-C. que l'on a découvert les premières preuves de cette relation. Pythagore a comparé le son produit par des marteaux de différentes longueurs, utilisés par les forgerons, au son du monocorde, dont on pense que Pythagore était l'inventeur.

Cette comparaison a permis à Pythagore de découvrir et d'améliorer les raisons mathématiques des sons grâce à l'étude des sons produits par le monocorde. Il a divisé la corde en deux parties égales, puis en trois parties égales, et ainsi de suite. Il a fait correspondre les sons mathématiquement en fonction des subdivisions qu'il effectuait et a créé la gamme pythagoricienne, dans laquelle chaque note maintenait une relation bien définie avec l'autre.

La gamme pythagoricienne est la base de la gamme diatonique, composée de sept notes, qui est à la base de la formation de toutes les autres gammes utilisées dans la musique occidentale. Une des gammes qui a émergé dans la culture occidentale est la gamme à 12 tons à tempérament égal, connue sous le nom de gamme tempérée ou gamme chromatique, dans laquelle il y a une plus grande consonance entre les notes.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les exposants dans la gamme tempérée

Au sixième siècle avant J.-C., Pythagore a utilisé la monocorde pour étudier la relation entre la longueur de la corde vibrante et le son musical qu'elle produit. Imaginons une corde tendue et fixée aux deux extrémités. Lorsqu'une extrémité de cette corde est touchée, elle vibre et produit une note que l'on appelle une note fondamentale. Pythagore a alors divisé la corde en deux parties égales, puis en trois et ainsi de suite. En continuant à subdiviser la corde, il obtient les harmoniques de la note fondamentale et, en combinant mathématiquement les sons, il crée des gammes qui donnent des notes naturellement liées les unes aux autres.

En conservant les mêmes intervalles (rapport numérique de 3:2) entre les notes et en partant de l'intervalle d'octave donné par les fréquences $\mathbf{f_0}$et $\mathbf{2f_0}$, la gamme diatonique pythagoricienne peut être formée. Les notes obtenues, communément appelées Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La et Si, forment la gamme dite diatonique de sept notes qui a été pendant des siècles la base d'autres gammes.

À partir du Moyen Âge, on a remarqué que certaines notes étaient trop proches les unes des autres, par exemple, les notes B (Si) et C (Do). Il a donc été décidé de créer une échelle dans laquelle l'intervalle de fréquence entre toutes les notes aurait le même rapport. La valeur de ce rapport est égale à l'intervalle entre les notes C (Do) et B (Si), un demi-ton. C'est ainsi que la gamme tempérée à 12 intervalles fut formée et améliorée par J. S. Bach.

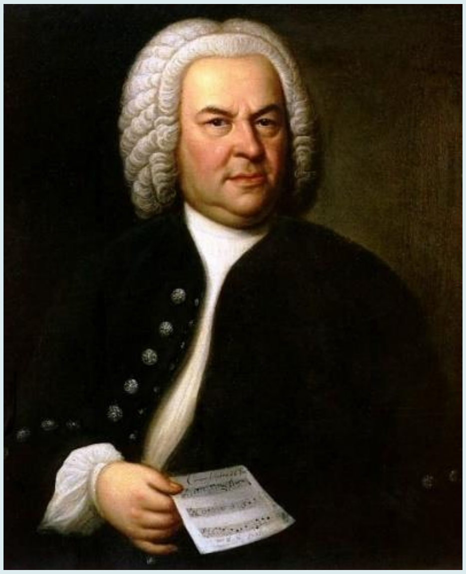

Fig. 1 - Johann Sebastian Bach
(Source:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Contrairement à Pythagore qui avait formé la gamme diatonique en obtenant 7 notes par une division qui peut être représentée par des fractions, cette nouvelle gamme peut être représentée par des puissances de 2 et résulter en 12 notes : C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A# et B.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Note	Demi-ton	Accord Pythagoricien	Gamme tempérée	Consonance
C	0	1	1	1
C#	1		$2^{1/12}$	
D	2	$9/8$	$2^{2/12}$	
D#	3		$2^{3/12}$	$6/5$
E	4	$81/64$	$2^{4/12}$	$5/4$
F	5	$4/3$	$2^{5/12}$	$4/3$
F#	6		$2^{6/12}$	
G	7	$3/2$	$2^{7/12}$	$3/2$
G#	8		$2^{8/12}$	
A	9	$27/16$	$2^{9/12}$	$5/3$
A#	10		$2^{10/12}$	
B	11	$243/128$	$2^{11/12}$	
C (octave)	12	2	2	2

En d'autres termes, les 12 notes de la gamme tempérée ou chromatique correspondent aux logarithmes de la base 2 : $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{2^{\frac{1}{12}}}$, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$, …, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$ et $\mathbf{2}$.

Une telle correspondance implique des tailles d'accords différentes dans les instruments de musique. Par coïncidence, les structures de piano qui sont formées en fonction de la taille des accords donnent une forme qui ressemble à une fonction logarithmique.

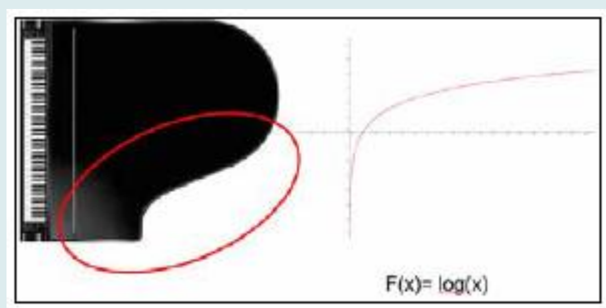

Fig. 2 – Piano et fonction logarithmique
(Source: RBECM, Passo Fundo, v. 1, n. 2, jul./dec. 2018)

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Glossaire

#: Symbole nommé "dièse" qui indique l'élévation d'un demi-ton dans une note.

Gamme diatonique: une division de l'octave en sept hauteurs.

Fréquence : une valeur physique indiquant le nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps donné.

Fréquence fondamentale : la fréquence la plus basse et la plus haute de la série harmonique d'un son.

Note Fondamentale : la note principale d'un accord, dont découlent les autres accords.

Harmonique : le son d'une série qui constitue une note.

Monochorde : un instrument de musique ancien composé d'une seule corde sur une caisse de résonance.

Octave: l'intervalle entre les notes de musique avec la moitié ou le double de sa fréquence.

Gamme: une séquence de tonalités ordonnée par la fréquence vibratoire des sons (généralement du son de la fréquence la plus basse au son de la fréquence la plus haute).

Demi-ton: intervalle qui est d'un demi-ton et qui constitue la distance minimale dans le système musical occidental traditionnel.

Gamme tempérée: division de l'octave en douze demi-tons égaux ; également appelée échelle chromatique.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Les Maths dans la gamme tempérée: logarithmes

Comme nous l'avons vu précédemment, la gamme tempérée (ou gamme chromatique) a été divisée en 12 notes qui peuvent être représentées par l'utilisation de logarithmes. En gardant ce fait à l'esprit, examinons la forme d'une courbe logarithmique :

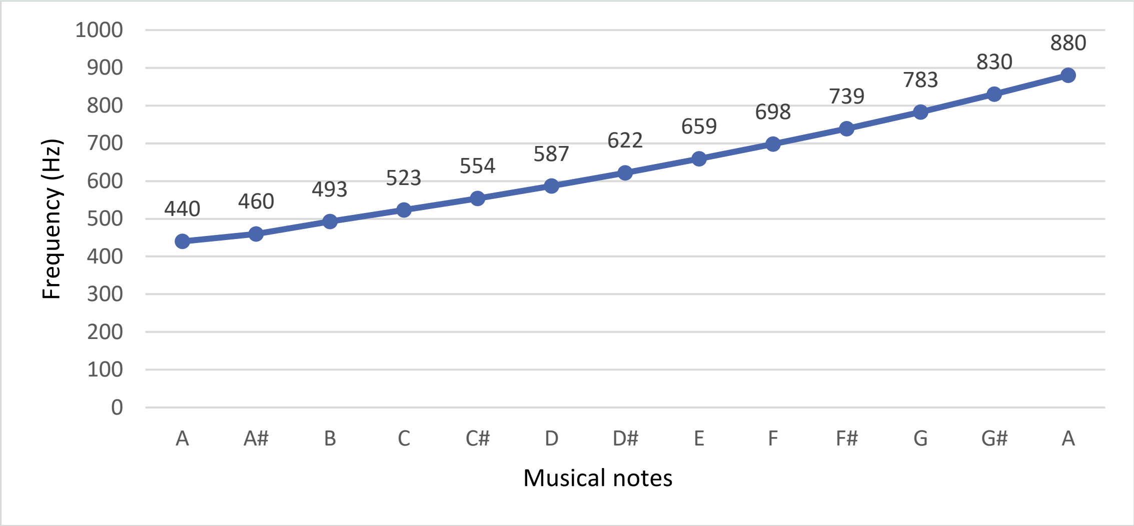

Fig. 3 – Fréquences d'une gamme tempérée
(Source: Auteur)

Pour mieux comprendre les logarithmes, examinons ce concept et ses propriétés.

Logarithme d'un nombre : fonction logarithmique de la base a

Quel est le logarithme de 8 en base 2?

La réponse est 3, car $\mathbf{2^3 = 8}$.

L'expression "3 est le logarithme de 8 en base 2" est exprimée : $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

Le logarithme d'un nombre $\mathbf{x}$ en base $\mathbf{a}$, où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+\backslash\{\mathbf{1}\}$, à un nombre $\mathbf{y}$, tel que: $\mathbf{a^y = x}$ est représenté par $\mathbf{\log_a x}$, c'est-à-dire,

$$\mathbf{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Donc, considérant que $\mathbf{a^1 = a}$ et $\mathbf{a^0 = 1}$, alors:

$\boxed{\mathbf{\log_a a = 1}}$ et $\boxed{\mathbf{\log_a 1 = 0}}$

et:

$\boxed{\log_a a^x = x}$ et $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Logarithme de la base 10 et logarithme de base $\mathbf{e}$

Parmi toutes les bases possibles, deux sont particulièrement communes : la base 10 et la base $\mathbf{e}$. Dans le cas d'un logarithme à base 10, appelé "logarithme commun", sa base peut être omise. Elle peut donc être simplement représentée par $\mathbf{\log x}$ au lieu de $\mathbf{\log_{10} x}$.

De même, le logarithme en base $\mathbf{e}$, appelé "logarithme naturel", peut être représenté comme $\mathbf{\ln x}$ au lieu de $\mathbf{\log_e x}$.

Le calcul des logarithmes dans une calculatrice peut être effectué en utilisant les boutons "LOG" et "LN".

Plus précisément, pour vérifier :

- $\mathbf{10^2 = 100}$, utilise le bouton "LOG", qui permet de calculer les logarithmes en base 10 ;
- $\mathbf{e^{4,605} \cong 100}$ utilise le bouton "LN", qui sert à calculer les logarithmes avec la base $\mathbf{e}$.

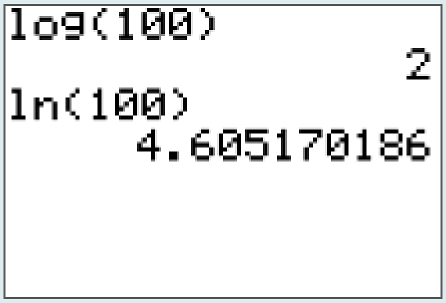

Fig. 4 – Calcul de logarithmes
(Source: Graphing calculator Texas Ti-84 Plus)

Fonctions logarithmiques

Une fonction logarithmique de la base $\boldsymbol{a > 1}$ est une fonction dans laquelle

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x \longmapsto y = \log_a x}$$

Les graphes des fonctions $\mathbf{f(x) = a^x}$ and $\mathbf{g(x) = \log_a x}$ sont symétriques par rapport à la droite de l'équation $\mathbf{y = x}$. Donc, les fonctions $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont des fonctions inverses.

Ces fonctions ont, pour $\mathbf{a > 1}$, les représentations graphiques suivantes :

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

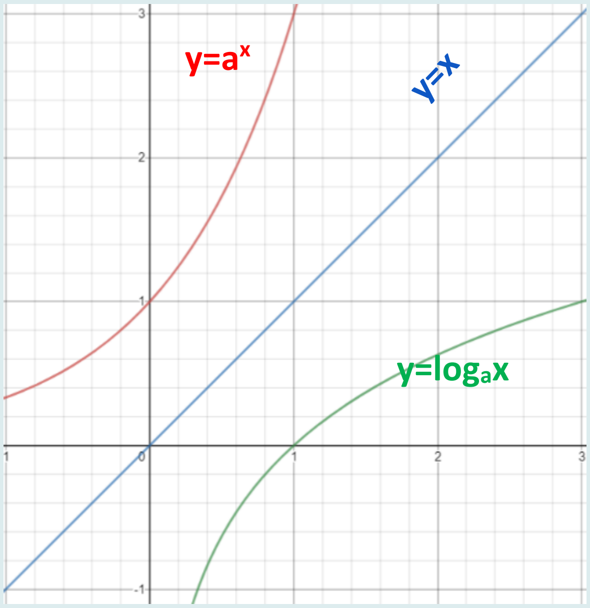

Fig. 5 – Graphes des fonctions a^x et $\log_a x$
(Source: Auteur, Desmos.com)

Propriétés des fonctions logarithmiques

Les propriétés des fonctions logarithmiques sont liées aux propriétés des fonctions inverses respectives (fonctions exponentielles).

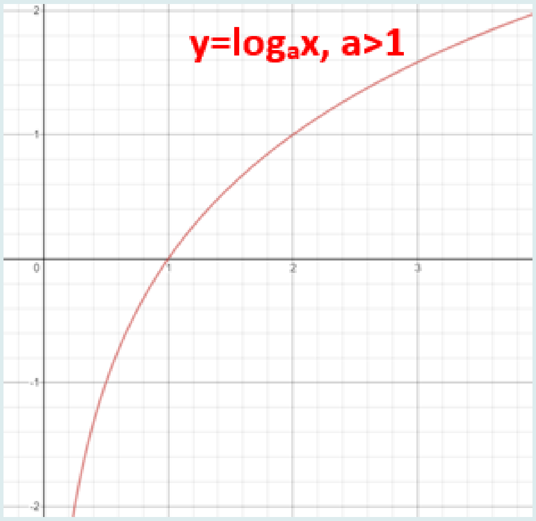

Fig. 6 - Graph of function y=log$_a$x
(Source: Author, Desmos.com)

Si $\begin{aligned} \mathbf{f}: \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} = \mathbf{\log_a x} \end{aligned}$ avec $\mathbf{a > 1}$, sa représentation montre la forme de la Figure 6 et les propriétés de la fonction $\mathbf{f}$ sont:

- f est continue
- Domaine: $D = \mathbb{R}^+$
- Codomaine: $D' = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, c'est-à-dire, $f(1) = 0$
- f est strictement croissante
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, c'est-à-dire, la droite de l'équation $x = 0$ est une asymptote verticale du graphe de f

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

Règles d'opérations de logarithmes

Les règles d'opérations de logarithmes sont liées aux règles d'opérations des puissances. Certaines de ces règles sont:

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$.

1. Règle du produit logarithmique

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes :

$$\mathbf{\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)}$$

2. Règle du quotient logarithmique

Le logarithme d'un quotient est la différence des logarithms :

$$\mathbf{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

3. Règle de puissance logarithmique

Le logarithme d'une puissance est le produit de l'exposant multiplié par le logarithme de la base:

$$\mathbf{\log_a(x^y) = y \times \log_a(x), \ \ p \in \mathbb{R}}$$

Exceptions:

$\boxed{\mathbf{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)}}$ car $\mathbf{\frac{1}{x} = x^{-1}}$ et $\boxed{\mathbf{\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{\log_a(x)}{n}}}$ car $\mathbf{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$

4. Changement de base logarithmique

Le logarithme $\mathbf{x}$ en base $\mathbf{a}$ est le quotient du logarithme $\mathbf{x}$ en base $\mathbf{b}$ et le logarithme de $\mathbf{a}$ en base $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}\ , \ \text{ où } \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\mathbf{1}\}$$

Cette règle est indispensable lorsque l'on veut calculer le logarithme d'un nombre dont la base est différente de 10 ou e, à l'aide d'une calculatrice.

Example: $\mathbf{\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3} \simeq 1,46}$ or $\mathbf{\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq 1,46}$

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

TÂCHES

TÂCHE 1

Calcule la valeur de :

1.1. $\log_2 64$ 1.2. $\log_5 5$ 1.3. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ 1.4. $\log_4 1$ 1.5. $\log_{\frac{1}{4}} 2$

1.6. $\log_{\sqrt{5}} 125$ 1.7. $\log_{10} 1000$ 1.8. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ 1.9. $\log_2 \sqrt{2}$ 1.10. $\log_e \sqrt[3]{e^4}$

1.11. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 1.12. $\log_5 0,2$ 1.13. $\log_e(e^{-2}) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

TÂCHE 2

Calcule la valeur de :

2.1. $\log 10000;$

2.2. $\log 0,01;$

2.3. $\ln e^{-7};$

2.4. $\ln(\sqrt[5]{e}) - \ln(e) + \ln(e^{-3});$

2.5. $\log(10) + \log(1) - \ln(e^2);$

2.6. $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log(\sqrt{10}).$

TÂCHE 3

Calcule, en utilisant les propriétés des logarithms et vérifie tes résultats à l'aide de ta calculatrice :

3.1. $\log_2(64 \times 16);$ 3.2. $\log_3(81:27);$ 3.3. $\log_2(32^8).$

TÂCHE 4

Soit $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Détermine la valeur de : $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$.

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.

POUR EN SAVOIR PLUS…

Échelle chromatique (anglais) :

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Introduction aux Logarithmes :

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/exponential-and-logarithmic-functions/introduction-to-logarithms/v/logarithms

Idée de base et règles pour les logarithms (en anglais) :

https://mathinsight.org/logarithm_basics

Tempérament égal à 12 tons (en anglais) :

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Pourquoi y a-t-il 12 notes dans une gamme ? (en anglais)

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

Ce projet a été financé grâce au soutien de la Commission Européenne. Cette publication reflète les opinions de son auteur, et la Commission ne pourrait être tenue responsable de l'utilisation faite de l'information contenue dans ce document.