Erasmus+

PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

UNIDADE 26: BACH E A FITA MUSICAL DE MOEBIUS

Sandgärdskolan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Bach e a Fita Musical de Moebius

Faixa Etária: 13 -15 anos

Duração: 1 hora

Conceitos Matemáticos: Infinito

Conceitos Artísticos: bidimensional vs. tridimensional. Artesanato

Objetivos Gerais: esta é uma ótima unidade para permitir que os alunos criem e, ao mesmo tempo, descubram uma imagem clássica da arte

Instruções e Metodologias: dê aos alunos a possibilidade de explorar a matemática através da música e do artesanato, aplicando-a à prática. Essa unidade é uma boa base para a sua turma descobrir diferentes conceitos matemáticos trabalhando com as próprias mãos

Recursos: a unidade fornece fotos e vídeos para o professor usar na sala de aula. Os tópicos indicados nos recursos também serão uma inspiração para encontrar outros materiais que possam ser relevantes para personalizar e dar nuances à aula.

Dicas para o professor: embora existam muitas atividades práticas envolvidas, lembre-se de ser exato acerca da matemática.

Objetivos de aprendizagem e competências: no final desta unidade, os alunos serão capazes de:

- Entender o infinito de uma maneira aperfeiçoada
- Explorar as suas habilidades no artesanato.

Discussão e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado nesta atividade	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar	1.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Erasmus+

Introdução

A fita Moebius é redescoberta por August Ferdinand Moebius ou foi Moebius quem a descobriu? Os gregos antigos já usavam o símbolo Moebius tão cuidadosamente estudado, para denotar eternidade e infinito. Moebius, por outro lado, descobriu as propriedades matemáticas da fita, ou seja, que tem um lado e uma aresta.

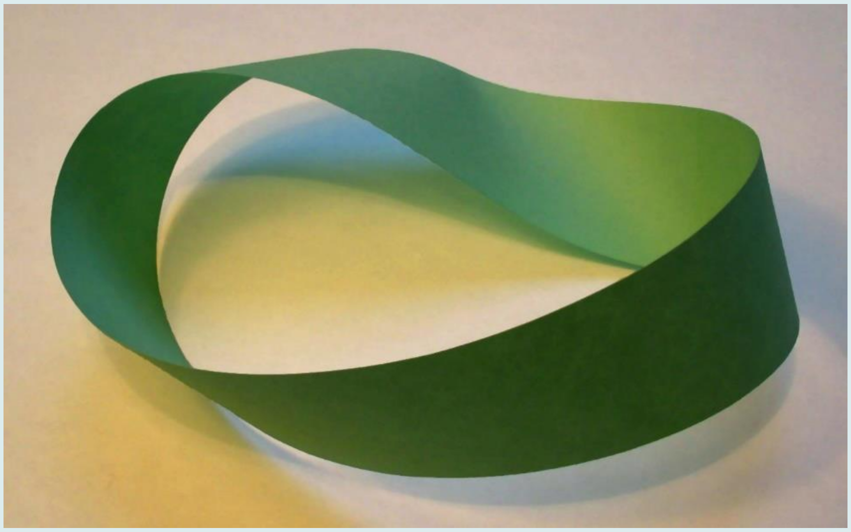

Figura 1: Tira de Moebius
(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip.jpg)

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

A Fita de Moebius

Agosto Ferdinand Moebius, nascido em 17 de novembro de 1790 em Schulpforta, morreu em 26 de setembro de 1868 em Leipzig, era um matemático e astrónomo alemão.

Em 1816, Moebius tornou-se professor extraordinário de astronomia e, em 1844, professor de mecânica e astronomia superior na Universidade de Leipzig. O seu principal trabalho de pesquisa pertence à matemática pura, onde inventou um novo método geométrico, o chamado cálculo baricêntrico. Os cálculos baricêntricos usam coordenadas baricêntricas.

O seu resultado mais famoso é a chamada fita de Moebius, que é uma superfície não orientável que tem apenas um lado. Enquanto Moebius estava totalmente empenhado em pensar no modo como essa fita poderia ser usada de maneiras diferentes, simultaneamente, outro pesquisador, chamado Listing estava nos mesmos caminhos de uma fita bidimensional que só tem um lado e uma aresta. Os dois cientistas publicaram simultaneamente artigos sobre as funções da fita e chegaram ao mesmo resultado aproximadamente ao mesmo tempo, mas foi o nome Moebius que foi finalmente usado para nomear a fita - e o mundo agora tinha a fita Moebius.

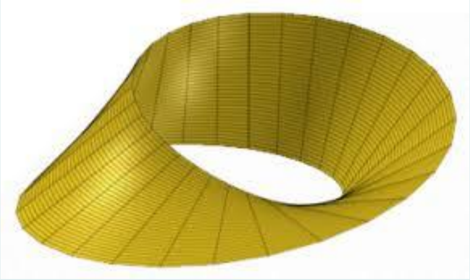

Figura 2: A fita de Moebius
(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6bius_strip_(plot).png)

• é uma superfície retangular longa
• que é girado 180 graus com as extremidades sobrepostas
• para que, ao longo de seu novo caminho, tenha um lado e uma aresta.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

• a superfície não é orientável e volta ao mesmo ponto constantemente, mas espelhada, uma vez que possui apenas um lado.

Não foram apenas Listing e Moebius que ficaram fascinados com a fita de um lado, onde um traço pode ser pintado em "todas" as páginas sem que a caneta seja levantada. Ainda hoje, a fita Moebius é usada em design gráfico, pois cria uma imagem dinâmica e ilimitada. Na literatura de ficção científica, a fita de Moebius é usada como descrição para um universo possível.

A fita de Moebius é o objeto matemático mais usado fora do mundo da matemática. Comparando a fita Moebius feita de papel com um loop de música, aprenderá que uma música que pode ser tocada do começo ao fim soando harmonicamente e melodicamente correta (basicamente, soando bem) é a mesma coisa que percorrera fita de Moebius uma vez. Então, se passar uma segunda vez, ainda assim começa no final da peça, para que a última nota se torne a primeira nota da peça, e, ainda assim, pareça agradável, obtendo a música de Moebius. Para descobrir isso sozinho, imprima as anotações, recorte-as e cole-as nas fitas de Moebius.

Confira a Fita musical de Moebius: https://www.youtube.com/watch?v=3x03nJnk-wk

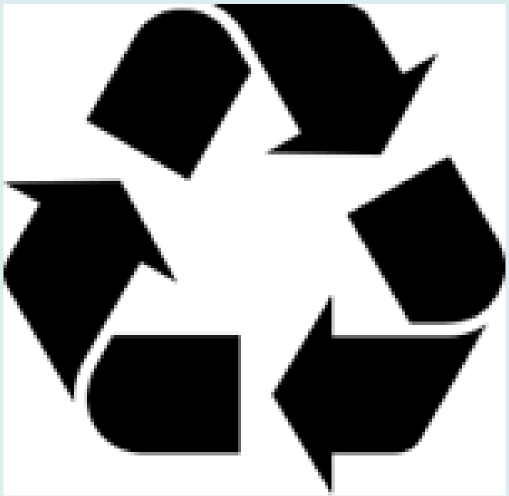

Figura 4: Símbolo de Reciclagem
(Fonte: https://creazilla.com/nodes/46010-recycling-symbol-emoji-clipart)

Figura 3: Bracelete
(Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M%C3%B6biusWeddingBand.JPG)

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

O uso atual das fitas Moebius inclui, entre outras coisas, a correia transportadora encontrada na fila de caixas num supermercado. A fita real que transporta os produtos que compramos tem o formato de uma fita de Moebius, pois desse modo reduz o desgaste e, consequentemente, aumenta a vida útil. Durante o período inicial de industrialização, a fita Moebius foi usada como o elo entre os motores a vapor e as máquinas que os motores a vapor usavam (tornos, debulhadores, etc.)

Figura 5: Cachecol tricotado
(Fonte: https://www.flickr.com/photos/smittenkittenoriginals/5080610523/)

Para fazer a sua fita de Moebius precisa de uma fita de papel em formato retangular. Depois, torça uma extremidade em meia volta e cole as pontas. Se considera que alguém, digamos uma formiga, caminha ao longo da fita, quando ela for a meio do percurso, estará do outro lado da fita. A fita Moebius tem, assim, um único lado. Moebius descobriu a fita enquanto observava as triangulações do avião.

Glossário

Coordenadas baricêntricas: em astronomia, as coordenadas baricêntricas são coordenadas não rotativas com a origem no baricentro de dois ou mais corpos.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

A Matemática por trás da fita de Moebius

Apesar da fita de Moebius não ser um círculo, ela está relacionada com o conceito de infinito. Pode dizer-se que o círculo e a fita de Moebius são iguais nesse aspeto. É claro que não se pode calcular o perímetro de uma fita de Moebius, mas há uma relação entre o círculo e o comprimento de uma linha.

Raio e diâmetro

Um círculo é uma figura geométrica circular que começa no ponto central - centro. A uma mesma distância do centro está o que chamamos de circunferência, que é a curva arredondada que "traça" o formato do próprio círculo. A distância do centro à periferia é chamada de raio (r) do círculo e é igual seja qual for o ponto da circunferência escolhido.

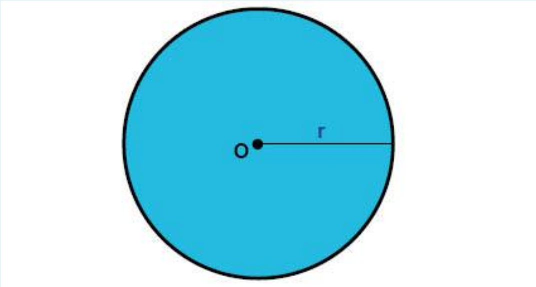

Figura 6: Círculo
(Fonte: autor)

Se tivermos uma linha reta que una dois pontos na circunferência e que passe em no centro, chamamos a essa distância o diâmetro do círculo (d). Na figura 7 abaixo estão marcados o raio r e o diâmetro d.

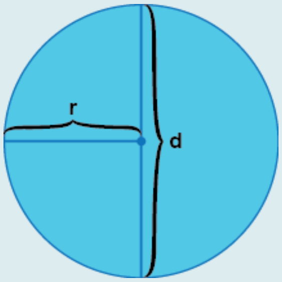

Figura 7: Círculo com diâmetro e raio
(Fonte: autor)

O diâmetro de um círculo é sempre o dobro do raio, ou seja, $d = 2r$.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Perímetro do círculo e o número pi (π)

Ao estudar o perímetro dos quadriláteros e triângulos, chegamos à conclusão de que o perímetro dessas figuras é igual à soma do comprimento dos lados.

Mas quando estudamos círculos, não é assim tão fácil calcular o perímetro. Se medirmos a circunferência e os diâmetros de diferentes círculos, percebemos, de imediato, que obtemos a mesma razão sempre que dividimos o perímetro de um círculo, O pelo diâmetro desse círculo, d.

Essa razão é a mesma para todos os círculos e tem o valor aproximado de 3,14159265, quando o valor é arredondado a oito casas decimais. Este número é muito importante na matemática e é chamado número pi, indicado pela letra grega π. Assim, a razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo é $\pi \approx 3,14$

Usando a definição do número π, podemos escrever uma fórmula para o perímetro de um círculo, O:

perímetro = π · diâmetro

$O = \pi \cdot d$

Uma vez que o diâmetro, d, de um círculo é sempre duas vezes maior que o raio r do círculo, também podemos escrever a fórmula do perímetro do círculo usando o raio, assim:

circunferência = 2 · π · raio

$O = 2\pi r$

O perímetro de um círculo é infinito e, na tarefa abaixo, pode ver as relações entre a roda pequena e a grande como uma relação indefinida entre si.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

TAREFA

Bicicleta

a. Quantas voltas a roda traseira gira quando a roda dianteira gira uma volta. O diâmetro da roda dianteira é de 75 cm. O diâmetro da roda traseira é de 25 cm.

b. Qual a distância percorrida pela roda dianteira se a roda traseira girar uma volta.

Figura 6: Bicicleta antiga
(Fonte: https://pixabay.com/vectors/bike-old-black-huge-wheel-small-306035/)

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Formigas a caminhar numa fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=ZN4TxmWK0bE

Aulas sobre a fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=JNtKcK27x1s

https://www.youtube.com/watch?v=1xKiSSVY5bI

Um pequeno filme de ficção científica que aborda o tema da fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=HD9MYY0aPug

"Isto é Matemática" T06 E07 – A Fita de Moebius:

https://www.youtube.com/watch?v=aZZ_d-FF0Bc

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.